Wahrscheinlichkeitsrechnung

Lehrbuch

Einführung in die Grundbegriffe

Teil 1

Datei Nr. 31101

Stand 1. Dezember 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text liefert eine Einführung in die Grundbegriffe der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*.
Sie ist eng mit der *Statistik* verbunden. Eide Gebiete zusammen nennt man *Stochastik*.
Der Text ist sehr lang, was einfach daran liegt, dass er sehr viele ausführliche Beispiele enthält.
An Hand des Inhaltsverzeichnisses kann man schnell vorankommen.

Inhalt

Fortsetzung in der Datei 31102

§ 1 Zufallsexperimente, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

1.1 Zufallsexperimente, Ergebnisse und Ereignisse

Will man Vorhersagen über das Eintreten bestimmter **Ereignisse** (z. B. beim Würfeln) machen, dann muss auch sicher sein, dass das **Ergebnis** nur durch den Zufall beeinflusst wird. Manipulationen (wie gezinkte Würfel) müssen ausgeschlossen sein. Thema dieses Heftes wird es sein, Vorhersagen über das Eintreten bestimmter Ergebnisse zu machen, die bei einem nur durch den Zufall gesteuerten Experiment, also einem **Zufallsexperiment**, eintreten können.

Man sollte die Fachsprache dazu beherrschen. Dies sind die wichtigsten Fachbegriffe:

Zufallsexperimente sind beispielsweise

a)
1. Würfeln,
2. das Werfen einer Münze,
3. das Drehen eines Glücksrades,
4. das Ziehen einer Spielkarte,
5. das Entnehmen einer Kugel aus einem Topf.

b) Führt man die in a) genannten Experimente mehrfach nacheinander aus, dann spricht man von **mehrstufigen Zufallsexperimenten**. Dabei muss man bisweilen auf folgendes achten:
1. Man kann einen Würfel dreimal nacheinander werfen oder aber mit drei Würfeln zugleich werfen.
2. Man kann eine gezogene Spielkarte vor dem nächsten Zug wieder zurücklegen, so dass sie beim nächsten Zug wieder zur Verfügung steht.
3. Analoges gilt für das Entnehmen einer Lottokugel aus einem Lostopf.

c) Als Zufallsexperimente gelten auch Spiele, wenn man voraussetzt, dass der nächste Spielzug wirklich vom Zufall bestimmt ist und nicht wie beim Schach durch Überlegung geplant wird.
Beim Ziehen einer Kugel aus einem Topf (man nennt sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung oft Urne) oder einer Spielkarte usw. muss „blind" gezogen werden, d.h. man darf weder durch Sehen noch durch Tasten erkennen, welches Objekt man zieht, sonst liegt kein Zufallsexperiment mehr vor.
Umfragen (unter Personen) und Auswählen von Personen aus einer Gruppe usw. sind nur dann Zufallsexperimente, wenn diese auch wieder „blind" geschehen.

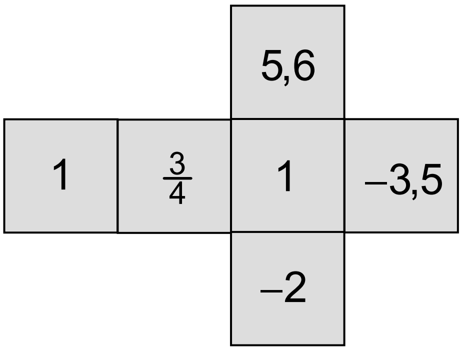
Es gibt unzählige Arten von Zufallsexperimenten, die man nicht alle aufzählen kann.
Diese Liste umfasst nur häufig vorkommende Zufallsexperimente. Im Laufe des Unterrichts werden weitere als Beispiele gestreift.

An einem Zufallsexperiment interessiert uns stets ein **Merkmal**.

Beim Würfeln sind es die oben gezeigten Zahlen (auch „Augen" genannt),
beim Ziehen einer Spielkarte kann es der Spielkartenwert sein oder die Farbe der Karte,
beim Auswählen von Personen kann man gar viele Dinge erfragen usw.

Jedes Merkmal kann in verschiedenen Ausprägungen auftreten. Die Menge aller möglichen Ausprägungen bilden die **Ergebnismenge** oder den **Ergebnisraum.** Man bezeichnet diesen sehr oft mit S und bezeichnet diese Menge S auch als **Grundmenge** der Ergebnisse. Man liest dafür auch das Wort **Stichprobenraum**.

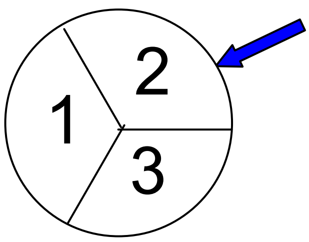
a) Das Zufallsexperiment „Würfeln" hat bei einem normalen Würfel die Ergebnismenge $S = \{1;2;3;4;5,6\}$. In dieser Schreibweise liegt bewusst ein Fehler: Man trennt die einzelnen Ergebnisse durch Semikola. Zwischen 5 und 6 steht aber hier ein Komma. Schüler sind da oft weniger genau und akzeptieren dieses Komma auch als Trennungszeichen zwischen den Ergebnissen. Bei „Zahl" besteht jedoch die Verwechslungsgefahr mit Dezimalzahlen. Hier ist es zwar klar, dass es beim Würfeln nicht das Ergebnis 5,6 geben kann, weil die Dezimalzahl „Fünf-Komma-Sechs" auf keinem Würfel aufgedruckt steht. Also denken wir uns einen Würfel so beschriftet wie dieses Netz es zeigt, dann hat das Experiment „einmal würfeln" die Ergebnismenge $S = \{1;\tfrac{3}{4};-2;-3,5;5,6\}$



Die auf zwei Feldern stehende 1 wird nur einmal in S aufgezählt (es sei denn, man hätte eine rote 1 und eine blaue 1 aufgedruckt, dann wären dies unterscheidbare Ergebnisse.
Und das Ergebnis 5,6 ist jetzt eine einzige Zahl und auch wegen der Unterscheidung zwischen Kommata und Semikolon klar als solche erkennbar.
Übrigens eignen sich solche selbst erstellten Würfel gut zum Rechentraining mit rationalen Zahlen. Das Zufallsexperiment „Summe der Augenzahlen bei zweimaligem Würfeln" wiederholt dann etwas die Rechenfähigkeiten. Hier sind der Fantasie „böser" Lehrer keine Grenzen gesetzt.

b) Die Ergebnismenge beim Werfen einer Münze kann so aussehen: $S = \{B\,;Z\}$ (Bild oder Zahl), oder $S = \{W\,;Z\}$ (Wappen oder Zahl).

c) Das Drehen des abgebildeten Glücksrades führt zur Ergebnismenge $S = \{1\,;2\,;3\}$.



usw.

Man muss zwischen **Ergebnis** und **Ereignis** unterscheiden:

a) Beim Würfeln kann ein Spiel so aussehen: Wer eine gerade Zahl wirft, bekommt 10 Punkte oder darf um 10 vorrücken usw. Hier wird man also belohnt, wenn das Ereignis „gerade Zahl" eintritt. Dieses besteht aus den Ergebnissen 2, 4 oder 6. Daher sind Ereignisse mathematisch gesehen auch wieder Mengen. Man schreibt daher das Ereignis A: „Es wird eine gerade Zahl gewürfelt" auch als $A = \{2;4;6\}$ und stellt Ereignisse durch Mengen dar.

Hier weitere Beispiele zu Ereignissen, die beim Würfeln vorkommen können:

B: „Es wir eine Zahl gewürfelt, die größer als 3 ist": $B = \{4;5;6\}$

C: „Es wird die Zahl 5 oder 6 gewürfelt": $C = \{5;6\}$

D: „Es wird nicht die 2 gewürfelt": $D = \{1;3;4;5;6\}$

E: „Man würfelt weder die 1 noch die 3 noch die 5": $E = \{2;4;6\}$.

Hier muss man erkennen, dass die Ereignisse A und E gleich sind. Wir halten fest: Ereignisse können durch ganz verschiedene Texte oder Eigenschaften beschrieben werden. **Wenn ihre Ergebnismengen übereinstimmen, sind sie mathematisch gesehen dasselbe Ereignis!**

F: „Die gewürfelte Zahl ist 2": $F = \{2\}$

G: „Es wird die 5 gewürfelt": $G = \{5\}$

Ereignisse, die nur ein Ergebnis besitzen, nennt man **Elementarereignisse**.
Es gibt bei diesem Zufallsexperiment „Würfeln" genau 6 Elementarereignisse.

H: „Es wird die Zahl 7 gewürfelt": $H = \{\ \}$

Weil dies bei einem üblichen Würfel dies nicht möglich ist, besitzt H kein Ergebnis.
Man schreibt dann **die leere Menge** als Ereignismenge auf. Ereignisse, zu denen es kein Ergebnis gibt, nennt man das **unmögliche Ereignis**. Es gibt übrigens nur ein unmögliches Ereignis: H': „Es wird die Zahl 8 gewürfelt" ist nämlich dieselbe leere Menge.

I: „Es wird eine Zahl kleiner als 9 gewürfelt".
Dies ist das **sichere Ereignis**, denn es tritt bei jedem Wurf ein. Seine Ergebnismenge ist die **Grundmenge** $I = S = \{1;2;3;4;5;6\}$

Es gibt sehr viel mehr Ereignisse, aber doch nicht beliebig viele. Man kann im Unterricht die Kinder einmal alle denkbaren Ergebnismengen, also Ereignisse aufschreiben lassen. Dabei muss man beachten, dass die Reihenfolge der Ergebnisse in einer Menge unwichtig ist. Also stellen $\{2;3;5\} = \{2;5;3\} = \{3;2;5\} = \{3;5;2\} = \{5;2;3\} = \{5;3;2\}$ dieselbe Menge dar, die man übrigens verbal so beschreiben kann: „Es wird eine Primzahl gewürfelt". (Eine Primzahl besitzt genau 2 Teiler, die 1 und sich selbst. Daher ist 1 keine Primzahl). Wir werden später zeigen, dass es beim Würfeln 64 mögliche Ereignisse gibt.

b) Das Zufallsexperiment „Werfen einer Münze“ besitzt die Ergebnismenge $S = \{W ; Z\}$.
Wir wollen jetzt einmal alle möglichen Ereignisse finden, die es dazu gibt.
Dazu müssen wir uns gemerkt haben:

Jedes Ereignis ist eine Menge, deren Elemente aus der Ergebnismenge S stammen, die also Element von S sind. Man sagt daher:

Jede Teilmenge der Menge S ist ein Ereignis.

Auf der Suche nach allen möglichen Ereignissen, die beim Werfen einer Münze eintreten können, müssen wir also sämtliche Teilmengen von S bestimmen.

1. Schritt: Es gibt 2 Teilmengen mit nur einem Element (Elementarereignisse):
$A = \{W\}$ und $B = \{Z\}$.

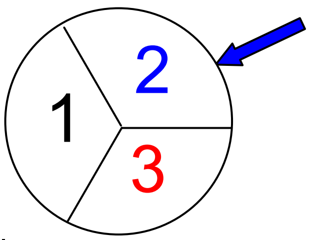
2. Schritt: Das Ereignis $C = \{\ \}$ besitzt kein Element aus S. Ein Beispiel für eine verbale Beschreibung ist „Man wirft die Zahl 7“. Da es (zumindest in Deutschland) keine Münze mit dem Wert 7 € gibt, liegt hier das unmögliche Ereignis vor.

3. Schritt: Das Ereignis „Man wirft Zahl oder Wappen“ wird durch die Grundmenge dargestellt. Diese gilt auch als Teilmenge, sozusagen von sich selbst.
Es hat sich bewährt, dass man jede Menge auch als Teilmenge von sich selbst bezeichnet, oft sagt man dann auch „unechte Teilmenge“ dazu.

Ergebnis: Die Grundmenge $S = \{W ; Z\}$ besitzt 4 Teilmengen:
2 mit je einem Element, dazu die leere Menge und die Grundmenge selbst.

Das gilt natürlich auch für jedes andere Zufallsexperiment, dessen Grundmenge nur aus zwei Elementen besteht. Denken wir uns einen Stapel mit 10 Karten, von denen 3 rot und 7 schwarz sind, dann gehört zum Zufallsexperiment „Ziehen einer Karte“ die Grundmenge $S = \{r ; s\}$.
Und genau wie oben gibt es dazu 4 Teilmengen, also kann man genau vier mögliche Ereignisse erwarten. Und immer gehören das **unmögliche Ereignis** $\{\ \}$ und das **sichere Ereignis** S dazu.

c) Das Drehen des abgebildeten Glücksrades führt zur Ergebnismenge $S = \{1; 2; 3\}$.



Aufgabe 1

Schreibe alle 8 Teilmengen auf, die es zu dieser Grundmenge gibt.
Versuche auch, zu jeder dieser Mengen (= zu jedem Ereignis) eine verbale Beschreibung zu finden. Denke daran, dass man jedes Ereignis auf beliebig viele Arten beschreiben kann. Hier sind also der Fantasie wenig Grenzen gesetzt.
Die Antwort steht auf der nächsten Seite.

Lösung 1

1. Schritt: Wenn das Rad an einer Zahl stehen bleibt, dann ist ein **Elementarereignis** eingetreten. Davon gibt es diese drei:

A: *„Es erscheint die Zahl 1“:* $A = \{1\}$,

B: *„Es erscheint eine Gerade Zahl“:* $B = \{2\}$,

C: *„Man erhält weder 1 noch 2“:* $C = \{3\}$.

2. Schritt: Es gibt Ereignisse (= Teilmengen), die genau zwei Ergebnisse besitzen:

D: „*Es erscheint eine Zahl, die kleiner als 3 ist.*“ $D = \{1;2\}$,

E: „*Es erscheint eine Zahl größer als 1*“: $E = \{2;3\}$.

F: „*Wir erhalten eine ungerade Zahl*“: $F = \{1;3\}$.

3. Schritt: Das unmögliche Ereignis: $U = \{\ \}$.

Man könnte es z. B. so beschreiben: „*Man erhält die Zahl 5*“.

4, Schritt: Das sichere Ereignis: $S = \{1;2;3\}$

Eine mögliche Beschreibung ist etwa: „*Man erhält eine Zahl kleiner als 4*“.

Aufgabe 2:

Wir untersuchen weitere Ereignisse zu diesem Experiment. Da es keine anderen als die oben genannten acht gibt, kann man sie diesen zuordnen: A, B, C, D, E, F, U oder S. Führe das aus:

E_1: Man erhält eine Zahl, die Teiler von 8 ist.

E_2: Man erhält eine Zahl, die kleiner als 10 ist.

E_3: Man erhält eine Primzahl.

E_4: Man erhält eine Zahl, die ungleich 1 ist.

E_5: Man erhält keine Primzahl.

E_6: Man erhält die Lösung der Gleichung $2 \cdot x + 3 = 13$.

E_7: Man erhält eine gerade Zahl.

E_8: Man erhält eine Zahl, die folgende Eigenschaft hat:
„Addiert man zu ihrem Quadrat die 6, dann erhält man ihren fünffachen Wert“.

E_9: Man erhält eine Zahl, die blau ist.

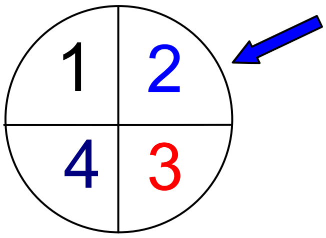
E_{10}: Man erhält eine Zahl, deren Farbe rot oder schwarz ist.

Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite:

Lösung 2

$E_1 = D = \{1;2\}$	Man erhält eine Zahl, die Teiler von 8 ist.
$E_2 = S = \{1;2;3\}$	Man erhält eine Zahl, die kleiner als 10 ist.
$E_3 = E = \{2;3\}$	Man erhält eine Primzahl.
$E_4 = E = \{2;3\}$	Man erhält eine Zahl, die ungleich 1 ist.
$E_5 = A = \{1\}$	Man erhält keine Primzahl.
$E_6 = U = \{\ \}$	Man erhält die Lösung der Gleichung $2 \cdot x + 3 = 13$. Die Lösung ist 5, und die gehört nicht zur Grundmenge S.
$E_7 = B = \{2\}$	Man erhält eine gerade Zahl.
$E_8 = E = \{2;3\}$	Man erhält eine Zahl, die folgende Eigenschaft hat: „Addiert man zu ihrem Quadrat die 6, dann erhält man ihren fünffachen Wert“. Am schnellsten geht es, wenn man die Probe für alle drei Zahlen der Grundmenge durchführt: x = 1: $1^2 + 6 = 7$ und $5 \cdot 1 = 5$ stimmt nicht. x = 2: $2^2 + 6 = 10$ und $2 \cdot 5 = 10$ stimmt! x = 3: $3^2 + 6 = 15$ und $3 \cdot 5 = 15$ stimmt.
$E_9 = B = \{2\}$	Man erhält eine Zahl, die blau ist. Hat man eine Schwarz-weiß-Kopie der Aufgabe, dann ist $E_9 = U = \{\ \}$.
$E_{10} = F = \{1;3\}$	Man erhält eine Zahl, deren Farbe rot oder schwarz ist. Hat man eine Schwarz-weiß-Kopie der Aufgabe, dann ist $E_9 = S = \{1;2;3\}$, dann sind alle Zahlen schwarz.

d) Das Drehen des abgebildeten Glücksrades führt zur Ergebnismenge $S = \{1;2;3;4\}$.



Die ***Aufzählung aller Teilmengen*** gestaltet sich hier etwas aufwendiger.

Wie immer gehören die leere Menge $\{\ \}$ für das unmögliche Ereignis und die Grundmenge $S = \{1;2;3;4\}$ für das sichere Ereignis dazu. Dann die vier Elementarereignisse (die je nur 1 Ergebnis zulassen): $\{1\};\{2\};\{3\};\{4\}$.

Nun folgen die Teilmengen, die genau 2 Ergebnisse (Elemente von S) enthalten und schließlich diejenigen mit 3 Ergebnissen.

Schreibe Sie bitte selbst auf!

Teilmengen mit 2 Elementen:

$$\begin{array}{r} \{1;2\}, \{1;3\}, \{1;4\} \\ \{2;3\}, \{2;4\} \\ \{3;4\} \end{array}$$

(Anordnungsschema: In der 1. Reihe stehen die drei Teilmengen, die mit 1 beginnen, darunter diejenigen, die mit 2 beginnen, und schließlich gibt es noch ein Paar, das mit 3 beginnt. Die Paare $\{2;1\},\{3;1\},\{3;2\},\{4;1\},\{4;2\}$ und $\{4;3\}$ sind identisch mit $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$, $\{1;4\}$, $\{2;4\}$ und $\{3;4\}$, **weil hier die Reihenfolge der Aufzählung (in einer Menge) keine Rolle spielt.**

Teilmengen mit 3 Elementen: $\{1;2;3\}$; $\{1;2;4\};\{1;3;4\};\{2;3;4\}$

Diese sind wieder leichter zu finden: Wenn drei von vier Elemente vorhanden sein sollen, dann fehlt immer eines, also zuerst die 4, dann die 3, dann 2 und am Ende die Zahl 1.

Wir addieren: Leere Menge, Grundmenge, 4 Elementarereignisse, 6 Ereignisse mit 2 Ergebnissen und 4 mit 3 Ergebnissen.
<u>Das sind zusammen 16 mögliche Ereignisse.</u>

Hier eine Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse:

Anzahl der Elemente	S = (Beispiel)	Anzahl der Teilmengen (Ereignisse)
2	{W;Z}	4
3	{ 1 ; 2 ; 3 }	8
4	{ 1 ; 2 ; 3 , 4 }	16

Man kann folgendes feststellen:

Mit zunehmender Anzahl von Ergebnissen (d. h. Elementen in S) verdoppelt sich die Zahl der Ereignisse.

<u>Vermutung:</u> Wenn man aus einem Stapel mit 5 Spielkarten $\{1;2;3;4;5\}$ eine Karte zieht, dann gibt es 32 mögliche Ereignisse.

Dies bedeutet verallgemeinert:

> Hat ein Zufallsexperiment insgesamt n Elementarereignisse,
> dann gibt es dazu $z = 2^n$ Ereignisse.

In einer Tabelle sieht das so aus:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z	2	4	8	16	32	64	128	256	516	1024	2048	4096

AUFGABE 3:

Notiere alle 32 Teilmengen von $S = \{1;2;3;4;5\}$.

Lösung 3

Unmögliches Ereignis: $\{\ \}$

Elementarereignisse: $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$ und $\{5\}$

Ereignisse mit 2 Elementen:

$\{1;2\},\{1;3\},\{1;4\},\{1;5\},$
$\{2;3\},\{2;4\},\{2;5\},$
$\{3;4\},\{3;5\}$ und
$\{4;5\}$

Ereignisse mit 3 Elementen:

$\{1;2;3\},\{1;2;4\},\{1;2;5\},$ *mit 1 und 2*
$\{1;3;4\},\{1;3;5\},$ *mit 1 und 3*
$\{1;4;5\},$ *mit 1 und 4*
$\{2;3;4\},\{2;3;5\},$ *mit 2 und 3*
$\{2;4;5\}$ *mit 2 und 4*
$\{3;4;5\}$ *mit 3 und 4*

Ereignisse mit 4 Elementen:

$\{1;2;3;4;\cancel{5}\};\{1;2;3;\cancel{4};5\};\{1;2;\cancel{3};4;5\};$
$\{1;\cancel{2};3;4;5\};\{\cancel{1};2;3;4;5\}$

Hier fehlt jeweils eines der 5 Elemente.

Das sichere Ereignis: $S=\{1;2;3;4;5\}$.

Das sind zusammen 32 Ereignisse (Teilmengen von S).

Ergänzung:

Für Interessierte sei verraten, wieso sich die Anzahl der Teilmengen verdoppelt, wenn man ein Element mehr dazu nimmt:

Man nehme das Beispiel (d) her, dort hat $S=\{1;2;3;4\}$ schon 16 Ereignisse.
Diese sind alle ohne die Zahl 5.
Nehmen wir überall noch die 5 dazu, kommen nochmals 16 Teilmengen dazu, und man hat genau die 32 Mengen von oben!

Fortsetzung auf der Mathe-CD